Université Abdelmalek Essaadi , ENSA Al Hoceima,

1ére Année Préparatoire , 2019-2020.

Examen d'Algébre de Base.

Durée : 2h. Pr. ABOUELHANOUNE

Exercice 1 : (4 pt)

1. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si n est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si non} \end{cases}$$

Montrer que $f(n)$ est bien définie et bijective.

2. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation T par :

$$(x, y)\ \mathrm{T}\ (x', y') \Leftrightarrow |x - x'| \leq y' - y$$

   (a) Vérifier que T est une relation d'ordre.

   (b) Cette ordre est-il total ou partiel. Justifiez ?

Exercice 2 : (4 pt)

Soit A un anneau, S un sous-anneau de A et I un idéal de A.

1. Montrer que

$$S + I = \{\ s + a \quad / \quad s \in S,\ a \in A\}$$

est un sous-anneau de A.

2. Montrer que I est un idéal de $S + I$.
3. Montrer que $S \cap I$ est un idéal de S.

Exercice 3 : (5 pt)

Soit

$$P(X) = X^6 - 6X^5 + 15X^4 - 20X^3 + 12X^2 - 4$$

1. Déterminer le $pgcd(P, P')$
2. Factoriser $P(X)$ en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Soit $F(X)$ la fraction suivante

$$F(X) = \frac{X^2 - 3}{(X^2 - 1)^2(X^2 + 1)}$$

Décomposer en éléments simples la fraction $F(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 : (7 pt)

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$\begin{cases} a_n = n^3 - n^2 - 12n \\ b_n = 2n^2 - 7n - 4 \end{cases}$$

1. Montrer, après factorisation, que les nombres a_n et b_n sont divisibles par $n - 4$.
2. Pour tout entier naturel $n \geq 5$, on pose

$$\begin{cases} \alpha_n = 2n + 1 \\ \beta_n = n + 3 \\ d_n = PGCD(\alpha_n, \beta_n) \end{cases}$$

   (a) Etablir une relation entre α_n et β_n **indépendante** de n.

   (b) Montrer que d_n divise 5.

   (c) Démontrer que les nombres α_n et β_n sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.

3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.
4. Déterminer, en fonction de n, le $PGCD$ de a_n et b_n.
5. **Application** : Vérifier les réusltats obtenus dans le cas particulier $n = 11$.